

Helligkeit in der linken unteren Ecke der Abb. 5. Sie zeigen tatsächlich die Tendenz zu kleineren D -Werten, als ihrer absoluten Helligkeit nach zu erwarten wäre. Der Verlauf der Kurve ist ohne Rücksicht auf sie gezogen. Das Maximum des Balmer-Sprungs wird bei $M = +1^m,0$ erreicht, entsprechend dem Spektraltyp A 0.

Die absoluten Helligkeiten der Überriesen sind zu unsicher, um die Abhängigkeit der D -Werte von ihnen betrachten zu können. Vermutlich liegen sie überwiegend auf einem Ast, der in der Abb. 5

parallel zu dem von links ansteigenden verläuft, aber um etwa 2^m zu größeren Helligkeiten verschoben ist. Die Verhältnisse in den Atmosphären weichen von denen der normalen Riesen und Zwerge infolge des stark verringerten Druckes erheblich ab. Der Anteil am Absorptionskoeffizienten durch Streuung an freien Elektronen, dem bei den Riesen und Zwergen keine Bedeutung zukommt, führt zu einer merklichen Veränderung ihrer atmosphärischen Verhältnisse gegenüber diesen.

Zur Theorie der Streuung langsamer Neutronen an freien Protonen

Von ERICH HÜCKEL

Aus der theoretischen Abteilung des Physikalischen Instituts der Universität Marburg
(Z. Naturforschg. **3a**, 134—142 [1948]; eingegangen am 8. Dezember 1947)

Zur Berechnung des Streuquerschnitts von Protonen gegenüber langsamen Neutronen wird der Ansatz eines spinabhängigen Potentials der Form $-A \cdot \exp(-r/a)$ zugrunde gelegt. Mit den Werten $a = 2,18 \cdot 10^{-13}$ cm, $A_T = 32,1$ MeV für die 3S -Kraft und $A_S = 10,2$ MeV für die 1S -Kraft, welcher Wert einem virtuellen 1S -Zustand entspricht, erhält man gute Übereinstimmung mit den neuen experimentellen Werten für den Streuquerschnitt im Energiebereich 0,035 bis etwa 2 MeV. Das Ergebnis spricht gegen die Existenz eines reellen 1S -Zustandes, wenn auch hieraus allein nicht eindeutig zwischen den beiden Möglichkeiten: virtueller oder reeller 1S -Zustand, entschieden werden kann. Als Grenzwert des Streuquerschnitts für verschwindende Neutronenenergie erhält man etwa $20,6 \cdot 10^{-24}$ cm². Es wird ferner die Rechnung für einen „rechteckigen Potentialtopf“ durchgeführt und nachgewiesen, daß die hierfür allgemein in der Literatur zu findende Formel unrichtig ist. Die richtige Formel wird angegeben. Man erhält einen virtuellen 1S -Zustand mit einer Energie von der Größenordnung 1,5 MeV im Gegensatz zu den bisher angegebenen Werten, die zwischen etwa 60 und 120 KeV liegen sollten. Bei richtiger Rechnung ergibt sich hier, wenn der 1S -Zustand virtuell ist, ein Verhältnis der 3S - zur 1S -Kraft etwa wie 3 : 2.

Die Streuung von Neutronen an Protonen ist schon früh theoretisch behandelt worden^{1–6}, doch sind exakte Messungen des Streuquerschnitts für Neutronen wohldefinierter Energie, die einen genauen Vergleich mit den theoretischen Ergebnissen ermöglichen, erst in jüngster Zeit von amerikanischen Autoren vorgenommen worden.

Es sind dies Messungen von Bailey und Mitarbb.⁷ über die Streuung monochromatischer Neutronen an Graphit und Cyclohexan im Ener-

giebereich von 0,35 bis 6 MeV, von Frisch⁸ mit Neutronen aus $^7\text{Li}(p, n)$ zwischen 0,035 und 0,49 MeV sowie von Coon und Barschall⁹ mit Neutronen von 2,5 MeV.

Diese Messungen lassen es möglich erscheinen, genauere Aussagen über die zwischen Proton und Neutron wirkenden Kräfte zu gewinnen.

In dem betrachteten Energiebereich ist einerseits die Energie der Neutronen groß gegen die chemische Bindungsenergie der Protonen, so daß

¹ E. Wigner, Z. Physik **83**, 253 [1933].

² H. A. Bethe u. R. Peiers, Proc. Roy. Soc. [London] Ser. A **149**, 176 [1935].

³ E. Feenberg u. J. K. Knipp, Physic. Rev. **48**, 906 [1935].

⁴ H. A. Bethe u. R. F. Bacher, Rev. Mod. Physics **8**, 114 [1936].

⁵ H. Dolch, Z. Physik **100**, 401 [1936].

⁶ C. Kittel u. G. Breit, Physic. Rev. **56**, 744 [1939].

⁷ Bailey, Bennett, Bergstrahl, Nuckoles, Richards u. Williams, Physic. Rev. **70**, 583 [1946].

⁸ D. H. Frisch, Physic. Rev. **70**, 589 [1946].

⁹ Coon u. Barschall, Physic. Rev. **70**, 592 [1946].



diese als frei betrachtet werden können, andererseits ist sie klein genug, um eine Beschränkung der Rechnung auf zentrale Stöße ($l = 0$) zuzulassen. Dementsprechend gehen hier nur die Kräfte für die S -Zustände in den Streuquerschnitt ein. Wir beschreiben diese bei parallelen Spins (Triplet) durch ein Potential

$$V_T(r) = -A_T e^{-r/a} \quad (1)$$

und bei antiparallelen Spins (Singlett) durch

$$V_S(r) = -A_S e^{-r/a}, \quad (1a)$$

wobei wir in beiden Fällen dieselbe „Wirkungsweite“ a annehmen.

Dieser Potentialansatz erscheint zweckmäßig, da sein asymptotisches Verhalten bei großen r dem von der Mesontheorie geforderten Verhalten nahekommt, andererseits bei $r = 0$ im Gegensatz zu dieser Theorie hier keine willkürliche Abschnidevorschrift zur Behebung von Singularitäten erforderlich ist. Hinzu kommt der formale Vorteil, daß sich die Wellengleichung für S -Zustände in geschlossener Form integrieren läßt.

Für die Wahl der Konstanten A und a gehen wir in der üblichen Weise so vor, daß wir a innerhalb der vernünftigen Grenzen willkürlich festlegen, und zwar wählen wir aus Gründen, die später ersichtlich werden, $a = 2,18 \cdot 10^{-13}$ cm. Die Konstante A_T muß dann so bestimmt werden, daß die Bindungsenergie des Deuterons den empirisch bekannten¹⁰ Wert $\varepsilon = 2,19$ MeV annimmt, während die Festlegung von A_S aus den hier zu diskutierenden Streuversuchen geschieht.

1. Der Grundzustand des Deuterons

Da die Wellenfunktion ψ für S -Zustände nur vom Abstand r der beiden Nukleonen abhängt, setzen wir zweckmäßig

$$\psi(r) = \frac{1}{r} \chi(r) \quad (2)$$

und erhalten für $\chi(r)$ die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} + \frac{M}{\hbar^2} (-\varepsilon + A_T e^{-r/a}) \chi = 0, \quad (3)$$

in welcher $M/2$ die reduzierte Masse, also M die

¹⁰ G. Stetter u. W. Jentschke, Z. Physik **110**, 214 [1938].

mittlere Masse eines Nukleons bedeutet. Die Substitution¹¹

$$\xi = e^{-r/2a} \quad (3a)$$

führt die Diffgl. für $\chi(r)$ über in eine solche für

$$\varphi(\xi) = \varphi(e^{-r/2a}) = \chi(r): \quad (3b)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\varphi}{d\xi} + \left(c^2 - \frac{q^2}{\xi^2} \right) \varphi = 0. \quad (4)$$

Hierbei ist gesetzt:

$$\frac{4M}{\hbar^2} a^2 A_T = c^2; \quad \frac{4M}{\hbar^2} a^2 \varepsilon = q^2. \quad (4a, b)$$

Das dem Grundgebiet $0 \leq r \leq \infty$ entsprechende Grundgebiet von ξ ist $1 \geq \xi \geq 0$.

Die allgemeine, für $\xi = 0$ ($r \rightarrow \infty$) verschwindende Lösung von (4) lautet:

$$\varphi = C J_q(c\xi) \quad (q > 0).$$

Soll ψ für $r = 0$ endlich bleiben, so muß φ bei $\xi = 1$ verschwinden:

$$J_q(c) = 0,$$

d. h. c muß eine Nullstelle der Bessel-Funktion vom Index q sein. Bezeichnen wir die i -te Nullstelle von J_q mit $c_q^{(i)}$, so muß erstens c größer als $c_0^{(1)} = 2,405$ sein, da dies die kleinste aller Nullstellen für $q \geq 0$ ist. Es muß aber auch kleiner als $c_0^{(2)} = 5,52$ sein, da sonst stets ein weiteres q so angegeben werden kann, daß zwei Nullstellen $c > c_0^{(1)}$ existieren, d. h. daß es außer dem Grundzustand des Deuterons noch einen stabilen angeregten Tripletzustand gäbe, was der Erfahrung widerspricht. Es muß daher

$$2,405 = c_0^{(1)} < c < c_0^{(2)} = 5,52$$

sein und entsprechend

$$0 < q < 2,3.$$

Die Wahl von $a = 2,18 \cdot 10^{-13}$ cm wurde nun (willkürlich) aus Gründen der Einfachheit getroffen; denn für diesen Wert wird bei der Bindungsenergie $\varepsilon = 2,19$ MeV gerade $q = 1$. Dann wird die Bedingung $J_1(c) = 0$ durch

$$c_1^{(1)} = 3,8317 \quad (4c)$$

¹¹ H. S. W. Massey u. C. B. O. Moore, Proc. Roy. Soc. [London] Ser. A **141**, 452 [1933]; oder H. Dolch⁵.

gelöst, womit sich nach (4a, b) mit $q = 1$

$$A_T = \varepsilon \frac{c^2}{q^2} = 32,1 \text{ MeV} \quad (4d)$$

ergibt.

Es läßt sich übrigens leicht zeigen, daß bei der so bestimmten Potentialkonstanten ein stabiler angeregter Zustand mit geraden $l \neq 0$ nicht existieren kann, da das abstoßende Zentrifugalpotential $\hbar^2 l(l+1)/Mr^2$ bereits für $l = 1$ überall das anziehende Potential $-A_T e^{-r/a}$ überwiegen würde und die 1S -Kraft sicher kleiner als die 3S -Kraft ist. Für Zustände mit ungeradem l folgt ferner aus den Untersuchungen von Volz¹² über die Sättigung der schweren und von Flüggé¹³ über den Aufbau der leichten Kerne, daß hier vermutlich die Kernkraft schon ohne Zentrifugalglied abstoßend ist.

2. Methode zur Berechnung des Streuquerschnitts

Die Wellenzahl k der einfallenden Neutronenwelle im Schwerpunktsystem ist gegeben durch

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{ME},$$

wo E die kinetische Energie des Neutrons im Koordinatensystem des Beobachters (ruhendes Proton) ist. Mißt man E in MeV, so berechnet sich die Wellenlänge aus:

$$\lambda/2\pi = 9,1 \cdot 10^{-13} / \sqrt{E} \text{ cm},$$

so daß $\lambda/2\pi \cong a$ für $E = 16$ MeV wird. Da die darzustellenden Beobachtungen sich größtenteils auf den Bereich $E \sim < 2$ MeV erstrecken, so können wir also die Schlüsse ziehen und die Methoden anwenden, die für große $\lambda/2\pi$ üblich sind.

Wir benutzen daher die Methode der Entwicklung nach Kugelfunktionen¹⁴, d. h. nach wachsenden Drehimpulsen l , die um so besser konvergiert, je größer $\lambda/2\pi$ im Vergleich zu a ist. Wir dürfen dabei erwarten — und eine Abschätzung zeigt die Richtigkeit dieser Vermutung —, daß nur die zen-

tralen Stöße merklich zum Streuquerschnitt beitragen, so daß die Streuverteilung im Schwerpunktsystem kugelsymmetrisch ausfällt, was gut zu der Beobachtung von Coon und Barschall⁹ paßt, daß die Abweichung von der Kugelsymmetrie bei $E = 2,5$ MeV maximal 10% beträgt.

Unter diesen Voraussetzungen genügt die Bestimmung der Lösung χ_0 der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \chi_0}{dr^2} + \frac{M}{\hbar^2} \left(\frac{E}{2} - V(r) \right) \chi_0 = 0. \quad (5)$$

Sie muß der Randbedingung $\chi_0 = 0$ für $r = 0$ genügen und verhält sich asymptotisch wie

$$\chi_0 \rightarrow \sin(kr + \eta_0). \quad (5a)$$

Dabei sind für den 3S - und 1S -Zustand für $V(r)$ die beiden verschiedenen Funktionen (1) bzw. (1a) einzusetzen, und die Konstante A_s für den 1S -Zustand ist dann nach dem Vorgehen von Wigner¹⁵ so zu bestimmen, daß der relativ große Streuquerschnitt bei kleinen Neutronenenergien erklärt wird.

Demgemäß ist die Rechnung für beide Spinrichtungen getrennt durchzuführen und es sind die erhaltenen Streuquerschnitte entsprechend den statistischen Gewichten aus¹⁴

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2(\eta_0)_T \quad \text{und} \quad \sigma_S = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2(\eta_0)_S \quad (6)$$

zu dem resultierenden Querschnitt

$$\sigma = \frac{3}{4} \sigma_T + \frac{1}{4} \sigma_S \quad (6a)$$

zusammensetzen.

3. Berechnung des Streuquerschnittes

Wir bestimmen zunächst die Phase η_0 aus der Differentialgleichung (5), die wir durch die Substitution (3a) in eine solche für $\varphi_0(\xi) = \chi_0(r)$ überführen. Dabei gelte wieder (4a) mit A_T oder A_s ; statt (4b) setzen wir jetzt, entsprechend dem positiven Energiewert:

$$\frac{4Ma^2}{\hbar^2} \frac{E}{2} = -(iQ)^2 = (2ka)^2 \quad (Q = 2ka \text{ reell}). \quad (7)$$

Damit lautet die Diffgl. für φ_0 :

$$\frac{d^2 \varphi_0}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\varphi_0}{d\xi} + \left(c^2 - \frac{(iQ)^2}{\xi^2} \right) \varphi_0 = 0. \quad (8)$$

¹² H. Volz, Z. Physik **105**, 537 [1937].

¹³ S. Flüggé, Z. Physik **105**, 522 [1937].

¹⁴ Siehe z. B. Mott u. Massey, Theory of atomic collisions, University Press, Oxford 1933, S. 24; oder Hb. Physik, 2. Aufl., Bd. **24**, 1, S. 710, J. Springer, Berlin 1933; oder S. Flüggé u. H. Marschall, Rechenmethoden der Quantentheorie, S. 105, J. Springer, Berlin 1947.

¹⁵ E. Wigner, s. Bethe u. Bacher⁴, S. 117.

Ihre allgemeine Lösung, in reeller Form geschrieben, ist:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2i} C \{ e^{i\delta} J_{-iQ}(c\xi) - e^{-i\delta} J_{+iQ}(c\xi) \},$$

wobei $J_{-iQ} = J_{+iQ}^*$.

Die Phase δ bestimmt sich aus der Bedingung, daß $\psi(r)$ für $r = 0$ endlich bleiben, $\chi_0(r) \equiv \varphi_0(\xi)$ also für $\xi = 1$ verschwinden muß, d. h. aus $\varphi_0(c) = 0$, zu:

$$\delta = \arg J_{+iQ}(c). \quad (9)$$

Das gesuchte asymptotische Verhalten von χ_0 für $r \rightarrow \infty$, vgl. (5a), ist durch dasjenige von $\varphi_0(\xi)$ für $\xi \rightarrow 0$ bestimmt. Es genügt daher das erste Glied der Potenzreihenentwicklung der Bessel-Funktion bei $\xi = 0$ ¹⁶:

$$J_{\pm iQ} \rightarrow \left(\frac{c\xi}{2} \right)^{\pm iQ} \frac{1}{\Gamma(1 \pm iQ)} = e^{\pm iQ \ln c \xi / 2} \cdot \frac{e^{\mp i\beta}}{G};$$

hierbei ist

$$\Gamma(1 \pm iQ) = G e^{\pm i\beta}, \quad \text{d. h.} \quad \beta = \arg \Gamma(1 + iQ) \quad (9a)$$

gesetzt.

Hiermit ergibt sich das asymptotische Verhalten für $\xi \rightarrow 0$ bzw. $r \rightarrow \infty$:

$$\varphi_0(\xi) \rightarrow \frac{C}{G} \sin \left(-Q \ln \frac{c\xi}{2} + \beta + \delta \right),$$

oder nach (3a) und (7)

$$\chi_0(r) \rightarrow \frac{C}{G} \sin \left(kr - Q \ln \frac{c}{2} + \beta + \delta \right). \quad (10)$$

Also ist nach (5a)

$$\eta_0 = -Q \ln \frac{c}{2} + \beta + \delta, \quad (10a)$$

und es wird:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \left(-Q \ln \frac{c}{2} + \beta + \delta \right), \quad (11)$$

wobei β und δ durch (9a) und (9) gegeben sind. Für β gilt die für $Q < 1$ konvergente Entwicklung¹⁷

¹⁶ Siehe z. B. Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, 2. Aufl., S. 430, J. Springer, Berlin 1931.

¹⁷ Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 2. Aufl. 1933, S. 87.

$$\begin{aligned} \beta &= \arg \Gamma(1 + iQ) = -Q \ln \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Q}{n} - \operatorname{arg} \frac{Q}{n} \right) \\ &= -Q \ln \gamma + \zeta(3) Q^3/3 - \zeta(5) Q^5/5 + \zeta(7) Q^7/7 - \dots, \end{aligned} \quad (11a)$$

wo $\ln \gamma = 0,57722$ die Eulersche Konstante und ζ die Riemannsche ζ -Funktion ist: [$\zeta(3) = 1,202$; $\zeta(5) = 1,0369$ usw.].

Es bleibt noch $\delta = \arg J_{iQ}(c)$ in Abhängigkeit von c (d. h. A) und Q zu bestimmen. Hierzu gehen wir folgendermaßen vor: Wir entwickeln $J_{\lambda}(c)$ für festes c von der Stelle $\lambda = 0$ aus in eine Taylorsche Reihe nach dem Index λ , der zunächst beliebige (komplexe) Werte haben kann. Diese Entwicklung ist möglich, da die Bessel-Funktion mit Ausnahme der Stelle $c = 0$ samt ihren Ableitungen eine analytische Funktion ihres Index ist. Also:

$$J_{\lambda}(c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n J_{\lambda}(c)}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} \cdot \lambda^n.$$

Wir nehmen nun die Ableitungen längs der reellen Achse; nennen wir p den reellen Index, so gilt

$$\frac{\partial^n J_{\lambda}(c)}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^n J_p(c)}{\partial p^n} \Big|_{p=0},$$

und wir können für den rein imaginären Index $\lambda = iQ$ also schreiben:

$$\begin{aligned} J_{iQ}(c) &= \left\{ J_0(c) - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 J_p(c)}{\partial p^2} \Big|_{p=0} Q^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 J_p(c)}{\partial p^4} \Big|_{p=0} Q^4 - \dots \right\} \\ &\quad + i \left\{ \frac{\partial J_p(c)}{\partial p} \Big|_{p=0} Q - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 J_p(c)}{\partial p^3} \Big|_{p=0} Q^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 J_p(c)}{\partial p^5} \Big|_{p=0} Q^5 - \dots \right\}, \quad (12) \end{aligned}$$

oder abkürzend:

$$J_{iQ}(c) = R_1 + i R_2. \quad (12a)$$

Dann wird:

$$\sin \delta = \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}, \quad \cos \delta = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}; \quad (12b)$$

R_1, R_2 sind konvergente Potenzreihen in $Q = 2ka$, deren Koeffizienten vom Argument c abhängen.

Die erste Ableitung läßt sich durch die Neumannsche Funktion N_0 ausdrücken¹⁸:

$$\left. \frac{\partial J_p(c)}{\partial p} \right|_{p=0} = \frac{\pi}{2} N_0(c); \quad (13)$$

die höheren Ableitungen lassen sich nicht auf einfache Funktionen zurückführen. Da die zur Verfügung stehenden tabulierten Bessel-Funktionen in ihrer Genauigkeit zur Berechnung der höheren Ableitungen nicht ausreichen, gehen wir zur Berechnung von δ nun folgendermaßen vor: wir ersetzen in (12), (12a) und (12b) die beiden unendlichen Potenzreihen R_1 und R_2 durch zwei endliche Polynome:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= J_0(c) - b_2 Q^2 + b_4 Q^4, \\ P_2 &= \frac{\pi}{2} N_0(c) Q - b_3 Q^3 + b_5 Q^5, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

und bestimmen die 4 (von c abhängigen) Koeffizienten $b_2 \dots b_5$ aus den Werten von $J_p(c)$ für 4 (reelle) Werte von p gemäß:

$$J_{p_i}(c) = J_0(c) + \frac{\pi}{2} N_0(c) \cdot p_i + b_2 p_i^2 + b_3 p_i^3 + b_4 p_i^4 + b_5 p_i^5 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

und zwar wurden benutzt: $p_i = -1, -1/2, +1/2, +1$.

Es zeigt sich, daß für den in Frage kommenden Wertebereich von Q der Einfluß des letzten Gliedes b_5 auf δ schon sehr geringfügig ist. In dem Bereich von Q , wo sein Einfluß noch recht klein ist, beginnt übrigens die Reihe (11a) für β bereits schlecht zu konvergieren (etwa bei $Q = 0,6$ bis $0,7$). Es entspricht dies auch ungefähr dem Energiebereich, in dem die P -Streuung nicht mehr ganz wird vernachlässigt werden können.

Für den Grenzwert von σ bei verschwindender Neutronenenergie ergibt sich insbesondere:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \sigma = 4 \pi a^2 \left[\pi \frac{N_0(c)}{J_0(c)} - 2 \ln \frac{\gamma c}{2} \right]^2. \quad (15)$$

Es wurden nun zunächst β , δ und σ_T in der angegebenen Weise für den 3S -Zustand mit $c = 3,8317$

berechnet. Es ergab sich das bekannte Resultat, daß der so erhaltene Streuquerschnitt σ_T insbesondere für kleine Energien viel kleiner als der beobachtete ausfällt. Sein Grenzwert wird nach (15):

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \sigma_T = 4,85 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2. \quad (15a)$$

Der weitere Verlauf von $\frac{3}{4} \sigma_T$ ist in Tab. 1 in Spalte 3 eingetragen.

Der beobachtete Grenzwert $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \sigma$ liegt, wie man den eingangs genannten Messungen entnimmt, und wie auch aus früheren Messungen von Cohen, Goldsmith und Schwinger¹⁹ sowie von Simons²⁰ hervorgeht, in der Gegend von $20 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$. Mit diesem Werte ergibt sich für den Grenzwert von σ_s nach (6a) und (15a) etwa:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \sigma_s \cong 65 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Hieraus läßt sich nun nach (15) zunächst annähert dasjenige c abschätzen, für welches σ_s diesen Grenzwert annimmt. Aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 0} \sigma_s &= 4 \pi a^2 \left[\pi \frac{N_0(c)}{J_0(c)} - 2 \ln \frac{\gamma c}{2} \right]^2 \\ &= 4 \pi a^2 F^2(c) \cong 65 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad (15b)$$

ergeben sich mit $a = 2,18 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ für die in der eckigen Klammer stehende, mit $F(c)$ bezeichnete Funktion die beiden Werte

$$F(c) \cong \pm 10,5. \quad (15c)$$

Die Funktion $F(c)$ hat den Verlauf einer „Resonanzkurve“. Die Resonanzstelle liegt bei $c_0^{(1)} = 2,405$. Sie trennt die reellen Zustände mit $c > 2,405$ von den virtuellen mit $c < 2,405$. Die (graphisch zu ermittelnde) Lösung von (15c), $c_v \cong 2,15$, gehörig zu $F(c) = +10,5$, entspricht einem virtuellen 1S -Zustand, die Lösung $c_r \cong 2,75$, gehörig zu $F(c) = -10,5$, entspricht einem reellen 1S -Zustand, der den Grenzwert (15b) für σ_s liefert.

Die mit $c_v = 2,15$ errechneten Werte von σ waren für kleine Energien noch um etwa $1/2$ bis $1 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ kleiner als die beobachteten. Es

u. D. P. Mitchell, Physic. Rev. 48, 265 [1935]]. Legt man den Wert 4,2 von Goldhaber u. Briggs für Sauerstoff zugrunde, so ergibt sich 18,9 statt 14,8, also ebenfalls ein nahe an 20 gelegener Wert (M. Goldhaber u. G. H. Briggs, Proc. Roy. Soc. [London] Ser. A 162, 140 [1937]).

¹⁸ Vgl. Anm. 17, S. 196 u. 198.

¹⁹ V. W. Cohen, H. H. Goldsmith u. J. Schwinger, Physic. Rev. 55, 106 [1939].

²⁰ L. Simons, Physic. Rev. 55, 792 [1939], gibt allerdings den Wert $14,8 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ an. Doch ist dieser auf den älteren Wert 3,3 für Sauerstoff bezogen (J. R. Dunning, G. B. Pegram, G. A. Fink

$Q = 2ka$	E in MeV	$\frac{3}{4} \sigma_T$	$\frac{1}{4} \sigma_S$ für reellen 1S -Zustand	σ für reellen 1S -Zustand	$\frac{1}{4} \sigma_S$ für virtuellen 1S -Zustand	σ für virtuellen 1S -Zustand
0	0	3,65	16,94	20,59	16,96	20,61
0,02	0,0017	3,65	nicht berechnet	nicht berechnet	16,56	20,21
0,05	0,011	3,64	16,19	19,83	15,21	18,85
0,10	0,044	3,62	13,90	17,52	12,00	15,62
0,15	0,098	3,58	11,38	14,96	8,90	12,48
0,20	0,175	3,54	9,04	12,58	6,45	9,99
0,30	0,393	3,41	5,73	9,14	3,53	6,94
0,40	0,70	3,15	3,58	6,73	2,09	5,24
0,50	1,09	2,84	2,39	5,23	1,33	4,17
0,60	1,57	2,51	1,64	4,15	0,90	3,41

Tab. 1. Berechnete Wirkungsquerschnitte in Einheiten 10^{-24} cm^2 .

wurde deshalb ein etwas höherer Grenzwert:

$$\lim_{Q \rightarrow 0} \sigma = 20,6 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad (16)$$

angenommen, der

$$\lim_{Q \rightarrow 0} \sigma = 67,8 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$$

entspricht, und mit diesem Wert wurde die Rechnung sowohl unter Annahme eines virtuellen als auch eines reellen Zustandes nochmals durchgeführt. Es ergab sich

$$F(c) = \pm 10,66;$$

daraus bestimmt sich

$$c_p = 2,153 \quad \text{bzw.} \quad c_r = 2,740. \quad (17)$$

Die hiermit erhaltenen Werte von $\frac{1}{4} \sigma_S$ und σ sind in den Spalten 4 bis 7 der Tab. 1 eingetragen, und

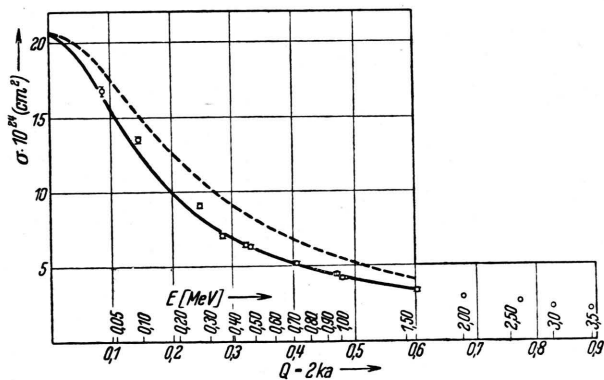


Abb. 1. Streuquerschnitt für exponentiellen Potentialansatz. Ausgezogene Kurve für virtuellen, gestrichelte für reellen 1S -Zustand. (Die Kurven beginnen bei $Q = 0$ mit horizontaler Tangente.)

$\sigma(Q)$ ist in der Abb. 1 als ausgezogene Kurve für den virtuellen und als gestrichelte für den reellen 1S -Zustand eingezeichnet. Die eingetragenen Meßpunkte sind den eingangs genannten Arbeiten der amerikanischen Autoren^{7,8} entnommen.

Die Übereinstimmung ist für den virtuellen Zustand eine recht gute. Der Grenzwert liegt vielleicht noch etwas höher als angenommen. Es erscheint allerdings nicht ausgeschlossen, daß durch eine andere (kleinere) Wahl des Grenzwertes die Kurve für den reellen Zustand an Stelle derjenigen für den virtuellen mit den Meßpunkten ebenso gut zur Deckung gebracht werden kann, so daß sich aus dem Verlauf des Streuquerschnitts allein nicht völlig eindeutig zwischen beiden Möglichkeiten entscheiden läßt. Doch hat man bekanntlich²¹ aus der Theorie des Einfangprozesses langsamer Neutronen durch Protonen auf die Existenz des virtuellen Zustandes geschlossen. Diese Theorie wird allerdings einer Nachprüfung bedürfen, da ihrer bisherigen Durchführung eine, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, unrichtige Formel für den virtuellen 1S -Zustand und damit auch ein unrichtiger, und zwar viel zu kleiner Wert für dessen Energie zugrunde gelegt wurde. Doch ist zu vermuten, daß der qualitative Schluß, der 1S -Zustand sei virtuell, zu Recht bestehen bleibt.

Aus den Werten (17) für c_p bzw. c_r berechnet sich nach (4a):

$$A_s = 10,2 \text{ MeV}, \quad (18)$$

wenn der 1S -Zustand virtuell ist, während sich

$$A_s = 16,4 \text{ MeV} \quad (18a)$$

²¹ Bethe u. Bacher⁴, S. 126. Dort weitere Literatur.

für den reellen 1S -Zustand ergeben würde. Im ersten Falle ist also das Verhältnis

$$A_T : A_S = 32,1 : 10,2 \cong 3 : 1 \quad (18b)$$

und nicht 2:1, wie bisher meist angenommen wurde. Dieses letztere Verhältnis würde angenähert für den *reellen* 1S -Zustand gelten. Mit $A_S = 16,4$ würde sich nach (4b) als seine Bindungsenergie 108 KeV ergeben, ein Wert, wie er bisher auf Grund der erwähnten unrichtigen Formel für den virtuellen Zustand etwa angenommen wurde (vgl. z. B. Anm. 6 u. 22).

Ein bestimmter Wert für die Energie des virtuellen Zustandes kann bei exponentiellem Potentialverlauf nicht gut angegeben werden.

4. Aufstellung und Diskussion einer neuen Formel bei rechteckigem Potentialverlauf²³

Das von den Angaben in der Literatur abweichende Verhältnis $A_S : A_T \cong 3 : 1$, das wir hier für den exponentiellen Potentialverlauf bei virtuellem 1S -Zustand erhalten haben, erschien auffällig. Es mußte insbesondere auch bedeuten, daß der virtuelle Zustand wesentlich höher liege, als bisher angenommen wurde. Die Angaben in der Literatur^{4, 6, 22} für seine Energie schwanken zwischen etwa 60 und 120 KeV. Da diese Werte auf der von Bethe angegebenen Formel beruhen, die für die Berechnung beim virtuellen Zustand rechteckigen Potentialverlauf zugrunde legte, so schien ein Vergleich der mit diesem Potential sich ergebenden Resultate mit den Ergebnissen der im Vorangehenden wiedergegebenen Berechnungen für exponentiellen Potentialverlauf angezeigt.

Dabei stellte sich heraus, daß die bisher in der Literatur für den virtuellen Zustand benutzte Formel für den Streuquerschnitt unrichtig ist, und daß auch diejenige für reelle Zustände einer kleineren Korrektur bedarf. Es erscheint daher notwendig, die Rechnungen für rechteckigen Potentialverlauf hier mitzuteilen.

Das Potential sei jetzt also gegeben durch:

$$V_T(r) = \begin{cases} -(A_T)_0 & \text{für } r \leq a \\ 0 & \text{für } r \geq a \end{cases} \quad \text{für } ^3S,$$

bzw.

$$V_S(r) = \begin{cases} -(A_S)_0 & \text{für } r \leq a \\ 0 & \text{für } r \geq a \end{cases} \quad \text{für } ^1S.$$

²² J. Schwinger u. E. Teller, Physic. Rev. **52**, 286 [1937].

An Stelle der Energieskala E führen wir die K^2 -Skala ein gemäß

$$K^2 = \frac{M}{\hbar^2} E; \quad \left(\frac{M}{\hbar^2} = 2,405 \cdot 10^{24} \text{ cm}^{-2} (\text{MeV})^{-1} \right). \quad (19)$$

Die Bezeichnungen für die Tiefe des Potentials, Lage des reellen bzw. virtuellen Niveaus und die Energie der Streuwelle sind aus den Abb. 2 und 3 zu ersehen. (Bei der Beziehung zwischen Wellenzahl k der Streuwelle und der Neutronenenergie ist in (19) rechts der Faktor $1/2$ hinzuzufügen,

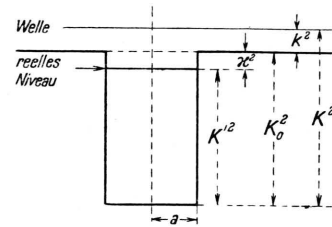


Abb. 2. Bezeichnungsschlüssel bei reellem Niveau.

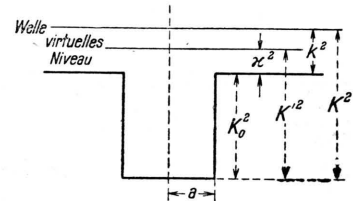


Abb. 3. Bezeichnungsschlüssel bei virtuellem Niveau.

wenn E die Energie des Neutrons im Ruhesystem bedeuten soll.)

Wir führen die Rechnung zuerst allgemein für reelles Niveau durch, wobei es gleichgültig ist, ob es sich um den Triplett- oder den Singlettfall handelt.

Unter Einführung von $\chi(r) = \psi(r)/r$ lautet die Lösung für den stabilen Zustand

$$\chi(r) = B_1 \sin K' r \quad \text{für } r \leq a;$$

$$\chi(r) = B_2 e^{-\kappa(r-a)} \quad \text{für } r \geq a.$$

Die Stetigkeitsforderung für χ und $\frac{d\chi}{dr}$ an der Stelle $r = a$ liefert:

$$B_1 \sin K' a = B_2; \quad B_1 K' \cos K' a = -\kappa B_2,$$

d. h. die Eigenwertsbedingung:

$$\frac{\text{tg } K' a}{K' a} = -\frac{1}{\kappa a}. \quad (20)$$

²³ Vgl. auch S. Flügg e u. E. Hückel, Physic. Rev. **73**, 520 [1948].

Für eine Welle der Wellenzahl $k = \sqrt{ME/2\hbar^2}$ lautet die Lösung der Wellengleichung:

$$\begin{aligned}\chi(r) &= C_1 \sin Kr & \text{für } r \leq a; \\ \chi(r) &= C_2 \sin(kr + \eta_0) & \text{für } r \geq a.\end{aligned}\quad (20a)$$

Die Stetigkeitsbedingungen für $r = a$ ergeben:

$$\begin{aligned}C_1 \sin Ka &= C_2 \sin(ka + \eta_0); \\ C_1 K \cos Ka &= C_2 k \cos(ka + \eta_0).\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die gesuchte Phase η_0 durch Auflösung der Gleichung

$$\frac{1}{P} = \frac{\operatorname{tg} Ka}{Ka} = \frac{1}{ka} \operatorname{tg}(ka + \eta_0) \quad (21)$$

nach η_0 . Sie erfolgt nach S. Flüge in folgender Weise: Man wendet das Additionstheorem für den tg an, löst alsdann die Gl. (21) nach $\operatorname{tg} \eta_0$ auf und drückt das für σ benötigte $\sin^2 \eta_0$ durch den so erhaltenen Ausdruck für $\operatorname{tg}^2 \eta_0$ aus. Mit der in (21) eingeführten Abkürzung P erhält man so durch eine elementare Rechnung für σ den streng gültigen Ausdruck:

$$\sigma = \frac{4\pi \sin^2 \eta_0}{k^2} = \frac{4\pi a^2 \left(1 - P \frac{\operatorname{tg} ka}{ka}\right)^2}{(P^2 + (ka)^2)(1 + \operatorname{tg}^2 ka)}. \quad (22)$$

Unter der Voraussetzung, daß

$$\kappa^2 \ll K'^2, \quad k^2 \ll K'^2, \quad (22a)$$

entwickelt man nun Ka in P von der Stelle des Eigenwertes K'^2 aus. Da $K^2 = K'^2 + \kappa^2 + k^2$ (siehe Abb. 2), so erhält man

$$K = K' + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 + k^2}{K'} + \dots$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} Ka &= \operatorname{tg} \left(K'a + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 + k^2}{K'} a + \dots \right) \\ &= \operatorname{tg} K'a - \frac{1}{\sin^2 K'a} \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 + k^2}{K'} a + \dots,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}P &= \frac{Ka}{\operatorname{tg} Ka} \\ &= \frac{K'a + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 + k^2}{K'} a + \dots}{\operatorname{tg} K'a - \frac{1}{\sin^2 K'a} \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 + k^2}{K'} a + \dots}.\end{aligned}$$

Unter Benutzung der Eigenwertsbedingung (20) und Vernachlässigung des Gliedes mit $1/\sin^2$ im Nenner, die wegen $\operatorname{tg} K'a \gg K'a$ (also $K'a$ nahe an $\pi/2$) erlaubt ist, ergibt dies:

$$P = -\kappa a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 + k^2}{K'^2} + \dots \right).$$

In (22) eingesetzt ergibt dies unter Vernachlässigung von $\operatorname{tg}^2 ka$ im Nenner und mit $\operatorname{tg} ka/ka = 1$ im Zähler:

$$\sigma_r \cong \frac{4\pi(1 + \kappa a)^2}{\kappa^2 + k^2} \cong \frac{4\pi(1 + 2\kappa a)}{\kappa^2 + k^2}. \quad (23)$$

Führt man an Stelle von κ, k die entsprechenden Energien ein, so lautet die Formel für den reellen Zustand:

$$\sigma_r \cong 4\pi \frac{\hbar^2}{M} \frac{1 + 2\sqrt{\frac{M}{\hbar^2}} E_r \cdot a}{E_r + E/2}; \quad (23a)$$

sie unterscheidet sich von der Betheschen durch den Faktor 2 vor der Wurzel. Dieses Glied ist übrigens für den 3S -Zustand keineswegs so sehr klein. Mit $E_r = 2,19$ MeV und $a = 2,18 \cdot 10^{-24}$ cm ergibt sich nämlich gerade

$$\sqrt{\frac{M}{\hbar^2}} E_r \cdot a = 0,5,$$

so daß der Unterschied zwischen der Formel (23a) und der Betheschen für σ_r 25% ausmacht.

Von wesentlicherer Bedeutung ist aber, wie erwähnt, das von Bethe abweichende Ergebnis, das man für einen virtuellen Zustand erhält. An Stelle der Eigenwertsbedingung (20) tritt hier die Definition des virtuellen Zustandes, die im Falle des rechteckigen Potentialverlaufs sehr einfach zu treffen ist. Wir definieren ihn dadurch, daß für ihn die Amplitude der Welle im Innern gleich der Amplitude im Äußern wird, so daß

$$K'a = \frac{\pi}{2}. \quad (24)$$

Für eine Welle k lautet die Anschlußbedingung für $r = a$ genau wie im Falle des reellen Zustandes, (20a), und es ergibt sich in derselben Weise wie dort jetzt für σ_v die streng gültige Formel (22). Entwickelt man aber jetzt P von der Stelle K' des nunmehr virtuellen Zustandes aus, so erhält man (vgl. Abb. 3) aus $K^2 = K'^2 + k^2 - \kappa^2$:

$$\begin{aligned}
 Ka &= K'a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{k^2 - \kappa^2}{K'^2} + \dots \right) \\
 &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} (k^2 - \kappa^2) a^2 + \dots, \\
 \operatorname{tg} Ka &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} (k^2 - \kappa^2) a^2 + \dots \right) \\
 &= -\frac{\pi}{a^2 (k^2 - \kappa^2)} + \dots
 \end{aligned}$$

und also

$$P = \frac{Ka}{\operatorname{tg} Ka} = -\frac{1}{2} (k^2 - \kappa^2) a^2 + \dots$$

Dies in (22) eingesetzt ergibt näherungsweise:

$$\begin{aligned}
 \sigma_v &\cong \frac{16 \pi a^2 (1 - (\kappa a)^2)}{((\kappa a)^2 - (ka)^2)^2 + 4 (ka)^2} \\
 &= \frac{4 \pi \hbar^2}{M} \frac{1 - \frac{E_v M}{\hbar^2} a^2}{\frac{a^2 M}{4 \hbar^2} \left(E_v - \frac{E}{2} \right)^2 + \frac{E}{2}}, \quad (25)
 \end{aligned}$$

während nach Bethe die Formel lauten sollte:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_v)_{\text{Bethe}} &= \frac{4 \pi a^2 (1 - \kappa a)}{(\kappa a)^2 + (ka)^2} \\
 &= \frac{4 \pi \hbar^2}{M} \frac{1 - \sqrt{\frac{E_v M}{\hbar^2}} a}{E_v + \frac{E}{2}}. \quad (25a)
 \end{aligned}$$

Nach der richtigen Formel (25) ergibt sich insbesondere bei gegebenem E_v ein ganz anderer Grenzwert von σ_v für $k=0$ als nach Bethe, nämlich

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma_v = \frac{4 \pi}{\kappa^2} \frac{4}{(\kappa a)^2} (1 - (\kappa a)^2) \quad (26)$$

an Stelle von

$$\lim_{k \rightarrow 0} (\sigma_v)_{\text{Bethe}} = \frac{4 \pi}{\kappa^2} (1 - \kappa a). \quad (26a)$$

Da κa wesentlich kleiner als 1 ist, und außerdem in (26) im Zähler noch zusätzlich der Faktor 4 steht, so benötigt man für den virtuellen 1S -Zustand eine wesentlich größere Energie, um den

beobachteten Grenzwert zu erhalten, als dies nach (26a) der Fall wäre.

Nimmt man als Wirkungsweite denselben Wert wie beim exponentiellen Potentialverlauf, $a = 2,18 \cdot 10^{-24}$ an, so ergeben sich nach (20), (23), (26) und mit $\lim \sigma = 20,6 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ folgende Werte:

$$(A_T)_0 = 31,6_5 \text{ MeV}; \quad \lim_{k \rightarrow 0} \sigma_T = 4,78 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2;$$

$(A_S)_0 = 20,0 \text{ MeV}$, wenn der 1S -Zustand virtuell ist; virtuelles Niveau bei $E_v = 1,49 \text{ MeV}$; $(A_S)_0 = 23,5 \text{ MeV}$, wenn der 1S -Zustand reell

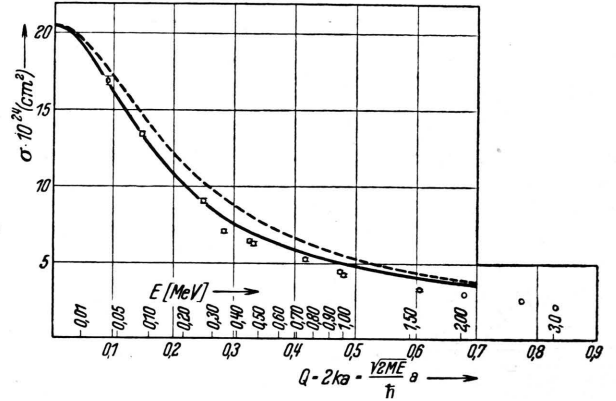


Abb. 4. Streuquerschnitt für rechteckigen Potentialansatz. Ausgezogene Kurve für den virtuellen, gestrichelte für den reellen 1S -Zustand.

ist. Seine Bindungsenergie wäre dann 0,094 MeV.

Das Verhältnis der Triplett- zur Singlettkraft ergibt sich also hier, wenn der virtuelle Zustand angenommen wird, nahe wie 3:2.

In Abb. 4 ist noch der nach (23), (25) und (6) mit den angegebenen Werten für a und $\lim \sigma$ für den virtuellen (ausgezogene Kurve) und den reellen 1S -Zustand (gestrichelte Kurve) berechnete Verlauf eingezeichnet. Er stimmt für die Meßpunkte bei den kleinsten Energien noch etwas besser als der für exponentiellen Potentialverlauf berechnete, liefert aber für größere Energien deutlich zu große Werte. Doch werden sich in diesem Gebiet die in (23) und (25) enthaltenen Vernachlässigungen bemerkbar machen.

Hrn. S. Flügg e danke ich für zahlreiche wertvolle Diskussionen und Hinweise.